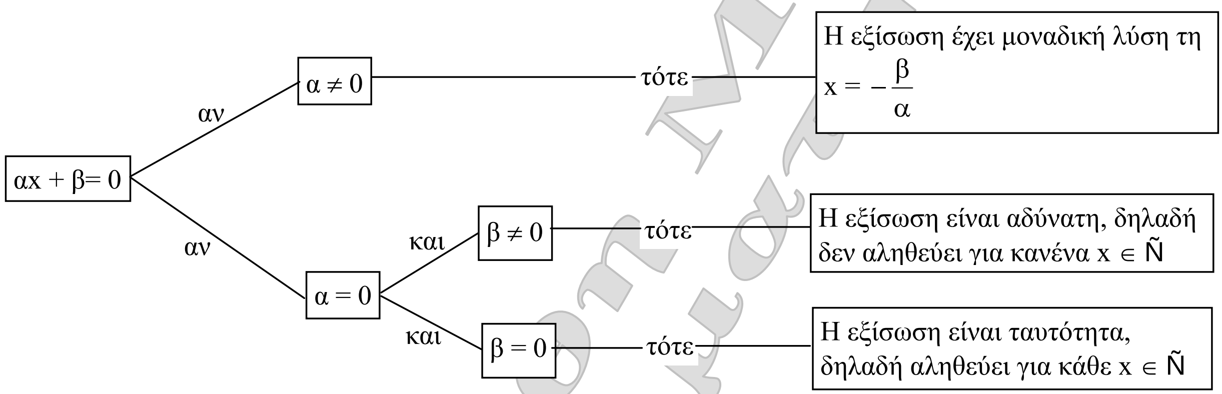
Άλγεβρα Α’ Λυκείου
Παράγραφος 1.3
Η εξίσωση: αx + β = 0

Επίλυση της εξίσωσης αx + β = 0

Η διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε τη λύση μιας εξίσωσης λέγεται **επίλυση της εξίσωσης**.

Η επίλυση της εξίσωσης αx + β = 0 δίνεται από τον παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

- Η εξίσωση αx + β = 0 έχει μοναδική λύση $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.
- Η εξίσωση αx + β = 0 είναι αδύνατη $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases}$.
- Η εξίσωση αx + β = 0 είναι ταυτότητα $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$

Παρατήρηση: Όταν η εξίσωση δεν είναι στην προφανή μορφή αx + β = 0, δουλεύουμε ως εξής:

1. **Απαλείφουμε τους παρανομαστές**. Αυτό το κατορθώνουμε πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών.
2. **Απαλείφουμε τις παρενθέσεις** με τη γνωστή απαλοιφή όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει πρόσημο και με την επιμεριστική ιδιότητα αν έχουμε πολλαπλασιασμό αριθμού με παρένθεση.
3. **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους** μεταφέροντας τους αγνώστους στο πρώτο μέλος και τους γνωστούς στο δεύτερο, προσέχοντας να αλλάζουμε πρόσημο στους όρους που αλλάζουν μέλος της εξίσωσης.

4. **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων**. Προσθέτουμε δηλαδή τους συντελεστές του αγνώστου x στο πρώτο μέλος και τους αριθμούς στο δεύτερο.
5. Μετά την εκτέλεση του βήματος 4, έχουμε φέρει την εξίσωση στη μορφή αx = β. Αν α ≠ 0 τότε η εξίσωση έχει τη μοναδική λύση $x = \frac{\beta}{\alpha}$, αν α = 0 και β ≠ 0 τότε η εξίσωση είναι αδύνατη ενώ αν α = 0 και β = 0 τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα, δηλαδή αληθεύει για κάθε x ∈ Ñ.

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{5} - \frac{x-3}{2} = \frac{4x-1}{3} &\Leftrightarrow 30\cdot\frac{x-4}{5} - 30\cdot\frac{x-3}{2} = 30\cdot\frac{4x-1}{3} \\ &\Leftrightarrow 6(x-4) - 15(x-3) = 10(4x-1) \\ &\Leftrightarrow 6x - 24 - 15x + 45 = 40x - 10 \\ &\Leftrightarrow 6x - 15x - 40x = -10 + 24 - 45 \\ &\Leftrightarrow -49x = -31 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-31}{-49} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{31}{49}. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = \frac{31}{49}$.

2. Να λυθεί η εξίσωση $x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1$.

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} + 1 &\Leftrightarrow 3\cdot x - 3\cdot\frac{x}{3} = 3\cdot\frac{2x}{3} + 3\cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 3x - x = 2x + 3 \\ &\Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow 0x = 3. \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. Να λυθεί η εξίσωση $x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2$.

$$\begin{aligned} x + \frac{x+4}{2} = \frac{3x}{2} + 2 &\Leftrightarrow 2\cdot x + 2\cdot\frac{x+4}{2} = 2\cdot\frac{3x}{2} + 2\cdot 2 \\ &\Leftrightarrow 2x + x + 4 = 3x + 4 \end{aligned}$$

Χρυσάνθη Μαγγίνα
Μαθηματικός

$\Leftrightarrow 2x + x - 3x = 4 - 4$

$\Leftrightarrow 0x = 0.$

Επομένως η εξίσωση είναι ταυτότητα.

Σχόλιο: Αν θέλουμε να λύσουμε εξισώσεις που δεν είναι της μορφής $αx + β = 0$, τότε δουλεύουμε ως εξής:

1. **Μεταφέρουμε** όλους τους όρους στο πρώτο μέλος.
2. **Κάνουμε γινόμενο παραγόντων** το πρώτο μέλος με παράγοντες της μορφής:

   $αx + β, \quad αx^2 + βx + γ, \quad αx^ν + β.$
3. **Εξισώνουμε κάθε παράγοντα με το μηδέν και λύνουμε τις εξισώσεις** που έχουν τη μορφή:

   $αx + β = 0, \quad αx^2 + βx + γ = 0, \quad αx^ν + β = 0.$

Παράδειγμα:

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$.

Η εξίσωση ορίζεται για $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)\cdot\frac{x^2}{x-1} - (x-1)\cdot 1 = (x-1)\cdot\frac{1}{x-1}$$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$

$\Leftrightarrow x(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$

$\Leftrightarrow x = 0$, αφού $x \neq 1$.

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x = 0$.

Επίλυση παραμετρικής εξίσωσης

Όπως είδαμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής $αx + β = 0$ ή της μορφής $αx = β$, στις οποίες τα α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις περιπτώσεις της επίλυσης της εξίσωσης $αx + β = 0$ ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α, β εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων, τα γράμματα αυτά λέγονται **παράμετροι**, η εξίσωση λέγεται **παραμετρική** και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της **διερεύνηση**.

Για να λύσουμε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού δουλεύουμε ως εξής:

1. **Απαλείφουμε τους παρανομαστές**. Αυτό το κατορθώνουμε πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. των παρανομαστών.
2. **Απαλείφουμε τις παρενθέσεις** με τη γνωστή απαλοιφή όταν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει πρόσημο και με την επιμεριστική ιδιότητα αν έχουμε πολλαπλασιασμό αριθμού με παρένθεση.
3. **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους όρους** μεταφέροντας τους αγνώστους στο πρώτο μέλος και τους γνωστούς στο δεύτερο, προσέχοντας να αλλάζουμε πρόσημο στους όρους που αλλάζουν μέλος της εξίσωσης.
4. **Βγάζουμε κοινό παράγοντα από δεξιά το x** στο πρώτο μέλος και έρχεται η εξίσωση στη μορφή $αx = β$.
5. **Παραγοντοποιούμε τα α και β**.
6. **Διακρίνουμε περιπτώσεις** για τα α και β σε σχέση με το μηδέν και βρίσκουμε για ποιες τιμές των α και β η εξίσωση $αx = β$:
   i. έχει μοναδική λύση,
   ii. είναι αδύνατη και
   iii. είναι ταυτότητα.

Παραδείγματα:

1. Να λυθεί η εξίσωση $(λ^2 – λ)x = λ^2 – 1$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

$(λ^2 – λ)x = λ^2 – 1 \Leftrightarrow λ(λ – 1)x = (λ + 1)(λ – 1)$.

Βρίσκουμε για ποιες τιμές του λ ο συντελεστής $λ(λ – 1)$ του x μηδενίζεται. Έχουμε:

$λ(λ – 1) = 0 \Leftrightarrow λ = 0$ ή $λ – 1 = 0 \Leftrightarrow λ = 0$ ή $λ = 1$.

Επομένως

i. Αν $λ \neq 0$ και $λ \neq 1$, τότε $λ(λ – 1) \neq 0$ και η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(λ+1)(λ-1)}{λ(λ-1)} = \frac{λ+1}{λ}.$$

ii. Για $λ = 0$, η εξίσωση γίνεται $0x = –1$, άρα είναι αδύνατη.

iii. Για $λ = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$, άρα είναι ταυτότητα.

2. Να βρείτε το λ αν η εξίσωση:

$$λ(λx – 1) = x(3λ – 2) – λ^2$$

i. είναι αόριστη ii. είναι αδύνατη.

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση στη μορφή $αx = β$.

$$λ(λx – 1) = x(3λ – 2) – λ^2 \Leftrightarrow λ^2x – λ = 3λx – 2x – λ^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow λ^2x – 3λx + 2x = – λ^2 + λ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (λ^2 – 3λ + 2)x = – λ^2 + λ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (λ – 1)(λ – 2)x = – λ(λ – 1)$$

Χρυσάνθη Μαγγίνα Μαθηματικός

i. Επειδή η εξίσωση είναι αόριστη έχουμε:

$$\begin{cases}(\lambda-1)(\lambda-2)=0\\ -\lambda(\lambda-1)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-1=0 \text{ ή } \lambda-2=0\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=1.$$

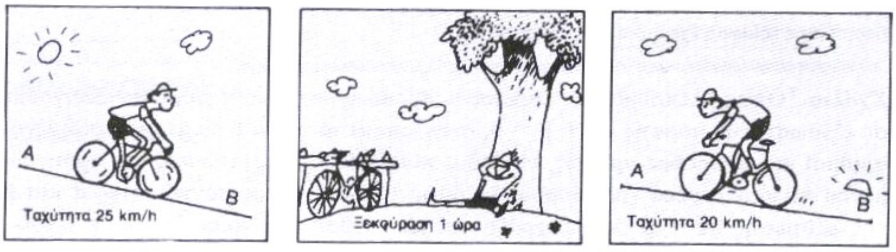
ii. Επειδή η εξίσωση είναι αδύνατη έχουμε:

$$\begin{cases}(\lambda-1)(\lambda-2)=0\\ -\lambda(\lambda-1)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda-1=0 \text{ ή } \lambda-2=0\\ \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1 \text{ ή } \lambda=2\\ \lambda\neq 0 \text{ και } \lambda\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=2.$$

Επίλυση προβλημάτων

Με τις εξισώσεις μπορούμε να λύσουμε προβλήματα που με τις μεθόδους της αριθμητικής είναι αρκετά δύσκολο να λυθούν.

Πρόβλημα:



Μετάβαση Επιστροφή

Να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ, αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες.

Λύση:

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει από το Β στο Α. Αφού ξεκουράστηκε 1 ώρα, ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1$ ώρες. Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10.$$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\frac{x}{25}+\frac{x}{20}+1=10 \Leftrightarrow \frac{100\cdot x}{25}+\frac{100\cdot x}{20}+100\cdot 1=100\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow 4x+5x+100=1000$$

$$\Leftrightarrow 4x+5x=1000-100$$

$$\Leftrightarrow 9x=900$$

$$\Leftrightarrow x=100$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.